Séries entières à une variable

1. Séries entières formelles

1. Algèbre des polynômes

Soit K un corps commutatif. On considère les polynômes formels à une lettre (ou «indéterminée») X à coefficients dans K (pour le moment il n'est pas question de donner de valeur à X). L'addition de deux polynômes, la multiplication d'un polynôme par un «scalaire» (c'est-à-dire par un élément de K) font de l'ensemble $K[X]$ des polynômes un *espace vectoriel* sur K, ayant la base infinie

$$1,\ X,\ \dots,\ X^n,\ \dots.$$

Chaque polynôme est une combinaison linéaire finie des X^n à coefficients dans K, qu'on écrit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n X^n$, étant entendu que, dans la suite illimitée des coefficients a_n, tous sont nuls sauf un nombre fini. La table de multiplication

$$X^p \cdot X^q = X^{p+q}$$

définit une multiplication dans $K[X]$; le produit

$$\left(\sum_p a_p X^p\right) \cdot \left(\sum_q b_q X^q\right)$$

est $\sum\limits_n c_n X^n$, où

$$c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q. \tag{1.1}$$

Cette multiplication est commutative et associative.
Elle est bilinéaire, en ce sens que

$$\begin{cases} (P_1 + P_2)\cdot Q = P_1 Q + P_2 Q \\ (\lambda P)\cdot Q = \lambda \cdot (PQ) \end{cases} \tag{1.2}$$

Quelques réponses numériques ou quantitatives

Chapitre I

3. $P_2 = a_2 b_1^2$, $P_3 = 2a_2 b_1 b_2 + a_3 b_1^3$,
$P_4 = a_2(2b_1 b_3 + b_2^2) + 3a_2 b_1^2 b_2 + a_4 b_1^4$,
$P_5 = 2a_2(b_1 b_4 + b_2 b_3) + 3a_3(b_1^2 b_3 + b_1 b_2^2) + 4a_4 b_1^2 b_2 + a_5 b_1^5$.
$X + \frac{1}{3}X^3 + \frac{2}{15}X^5 + \cdots$

4. *a)* infini, *b)* 1, *c)* $\inf(\frac{1}{a}, \frac{1}{b})$.

6. 1.

14. (ii) $n\pi/a$, n entier.

Chapitre III

17. (i) $x = \dfrac{2\,\mathrm{Re}(z)}{1+|z|^2}$, $y = \dfrac{2\,\mathrm{Im}(z)}{1+|z|^2}$, $z = \dfrac{|z|^2-1}{|z|^2+1}$.

20. (i) $(\pi(2n-2)!)/(2^{n-1}[(n-1)!]^2 a^{n-1/2} b^{1/2})$,
(ii) $\pi(b-a)$,
(iii) $\pi(e^{-a} - 1/2)$,
(iv) $\pi a^n/(1-a^2)$ si $|a| < 1$, $\pi/a^n(a^2-1)$ si $|a| > 1$.

23. (ii) $\pi/(n\sin(\alpha+1)\pi/n)$.

25. (i) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{a+bn^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\sqrt{ab}}\coth\pi\sqrt{\frac{a}{b}} - \frac{1}{a}\right)$,
$\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^2}{n^4+a^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}a}\,\frac{\mathrm{sh}\pi a\sqrt{2} - \sin\pi a\sqrt{2}}{\mathrm{ch}\pi a\sqrt{2} - \cos\pi a\sqrt{2}}$,
(ii) $\displaystyle\sum_{p\geqslant 1} \frac{1}{x^2-p^2} = \frac{1}{2x}\left(\pi\,\mathrm{ctg}\,\pi x - \frac{1}{x}\right)$.

Chapitre V

8. $(-1)^n/n!$

9. $a_6 = a_2^2/3$, $a_8 = 3a_2 a_4/11$.

Chapitre VI

7. $w = rz/\sqrt{a^2z^2 + r^4 - a^4}$ avec la détermination du radical qui est réelle positive pour z réel.