# Séries entières à une variable

## 1. Séries entières formelles

### 1. Algèbre des polynômes

Soit $K$ un corps commutatif. On considère les polynômes formels à une lettre (ou « indéterminée ») $X$ à coefficients dans $K$ (pour le moment il n'est pas question de donner de valeur à $X$). L'addition de deux polynômes, la multiplication d'un polynôme par un « scalaire » (c'est-à-dire par un élément de $K$) font de l'ensemble $K[X]$ des polynômes un *espace vectoriel* sur $K$, ayant la base infinie

$$1,\ X,\ \ldots,\ X^n,\ \ldots.$$

Chaque polynôme est une combinaison linéaire finie des $X^n$ à coefficients dans $K$, qu'on écrit $\sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$, étant entendu que, dans la suite illimitée des coefficients $a_n$, tous sont nuls sauf un nombre fini. La table de multiplication

$$X^p \cdot X^q = X^{p+q}$$

définit une multiplication dans $K[X]$ ; le produit

$$\left(\sum_p a_p X^p\right)\cdot\left(\sum_q b_q X^q\right)$$

est $\sum_n c_n X^n$, où

$$c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q. \tag{1.1}$$

Cette multiplication est commutative et associative.
Elle est bilinéaire, en ce sens que

$$\left\{\begin{array}{rcl}(P_1+P_2)\cdot Q &=& P_1Q+P_2Q\\ (\lambda P)\cdot Q &=& \lambda\cdot(PQ)\end{array}\right. \tag{1.2}$$

## Quelques réponses numériques ou quantitatives

CHAPITRE I

3. $P_2 = a_2 b_1^2,\ P_3 = 2a_2 b_1 b_2 + a_3 b_1^3,$
$P_4 = a_2(2b_1 b_3 + b_2^2) + 3a_2 b_1^2 b_2 + a_4 b_1^4,$
$P_5 = 2a_2(b_1 b_4 + b_2 b_3) + 3a_3(b_1^2 b_3 + b_1 b_2^2) + 4a_4 b_1^2 b_2 + a_5 b_1^5.$
$X + \frac{1}{3}X^3 + \frac{2}{15}X^5 + \cdots$

4. *a)* infini, *b)* 1, *c)* $\inf(\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b})$.

6. 1.

14. (ii) $n\pi/a$, $n$ entier.

CHAPITRE III

17. (i) $x = \dfrac{2\ \mathrm{Re}(z)}{1+|z|^2},\ y = \dfrac{2\ \mathrm{Im}(z)}{1+|z|^2},\ z = \dfrac{|z|^2-1}{|z|^2+1}.$

20. (i) $(\pi(2n-2)!)/(2^{n-1}[(n-1)!]^2 a^{n-1/2} b^{1/2}),$

(ii) $\pi(b-a),$

(iii) $\pi(e^{-a} - 1/2),$

(iv) $\pi a^n/(1-a^2)$ si $|a|<1$, $\quad \pi/a^n(a^2-1)$ si $|a|>1.$

23. (ii) $\pi/(n\sin(\alpha+1)\pi/n).$

25. (i) $$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{a+bn^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\sqrt{ab}}\coth\pi\sqrt{\frac{a}{b}} - \frac{1}{a}\right),$$
$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^2}{n^4+a^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}a}\frac{\mathrm{sh}\pi a\sqrt{2} - \sin\pi a\sqrt{2}}{\mathrm{ch}\pi a\sqrt{2} - \cos\pi a\sqrt{2}},$$

(ii) $$\sum_{p\geqslant 1} \frac{1}{x^2-p^2} = \frac{1}{2x}\left(\pi\mathrm{ctg}\pi x - \frac{1}{x}\right).$$

CHAPITRE V

8. $(-1)^n/n!$

9. $a_6 = a_2^2/3, \quad a_8 = 3a_2 a_4/11.$

CHAPITRE VI

7. $w = rz/\sqrt{a^2z^2 + r^4 - a^4}$ avec la détermination du radical qui est réelle positive pour $z$ réel.